$\boxed{\mathsf{G.21}}$ Für alle Dreiecke mit den Winkeln α, β, γ gelten die Ungleichungen:

$$0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \sqrt{3}\,\frac{3}{2}, \quad \triangle \tag{G.21}$$

$$1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}. \quad \triangle \tag{G.22}$$

G.21 *Beweise:* a) Da $f(x) = \sin x$ in $[0, \pi]$ eine streng konkave Funktion ist, folgt mittels der JENSENschen Ungleichung (s. Aufgabe **U.26**) die rechte Seite der Ungleichung

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \geq \frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma);$$

die linke Seite ist wegen $\sin\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$, $\sin\gamma > 0$ offensichtlich. $\square$
b) Mit den Seitenlängen $a \equiv |\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{BC}|$, $b \equiv |\boldsymbol{b}| = |\overrightarrow{CA}|$ und $c \equiv |\boldsymbol{c}| = |\overrightarrow{AB}|$ des Dreiecks ist

$$\left(\frac{\boldsymbol{a}}{a} + \frac{\boldsymbol{b}}{b} + \frac{\boldsymbol{c}}{c}\right)^2 = 3 + 2\left(\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}{bc} + \frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}{ca} + \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{ab}\right) \geq 0.$$

Mit $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = -bc\cos\alpha$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = -ca\cos\beta$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -ab\cos\gamma$ ergibt sich daraus die rechte Seite der Behauptung. (Oder noch kürzer aus dem Satz von ERDÖS-MORDELL (D.15) mit P als Umkreismittelpunkt. Siehe auch *Crux Math*, 27:1, S. 45–47.) Die linke Seite der Ungleichung folgt wegen $0 < \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ unmittelbar aus der Identität

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad \square$$