

G.22 Für alle *spitzwinkligen* Dreiecke gilt:

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \geq 3\sqrt{3}. \quad \triangle \tag{G.23}$$

G.22 *Beweis:* Die Gleichung zeigen wir mit dem Additionstheorem:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan(\pi - \gamma) = -\tan \gamma,$$

und die Ungleichung mit der AM-GM-Ungleichung (alle Tangens sind positiv):

$$\begin{aligned} \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma &= \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma \geq 3 \sqrt[3]{\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}, \\ (\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma)^{\frac{2}{3}} &\geq 3 \quad \implies \quad \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \geq 3\sqrt{3}. \quad \square \end{aligned}$$