

G.62 Wenn sich die Seitenhalbierenden m_b und m_c in einem Dreieck senkrecht schneiden, dann gilt $\cos \alpha \geq \frac{4}{5}$.

G.62 *Beweis:* (Bild) Die Mittelpunkte der Seiten CA und AB seien E bzw. F . Mit $\mathbf{a} = 0$ ist $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\mathbf{c} - \mathbf{b}$ sowie $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{c}$. Damit erhalten wir

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{5}{4} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \frac{b^2 + c^2}{2} = 0.$$

Daraus folgt weiter

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{2}{5} (b^2 + c^2) \implies \cos \alpha = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{bc} = \frac{4}{5} \cdot \frac{b^2 + c^2}{2bc} \geq \frac{4}{5},$$

letzteres nach der AM-GM-Ungleichung. \square

