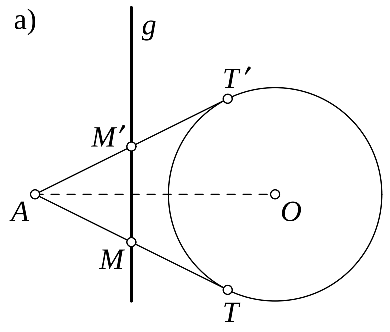
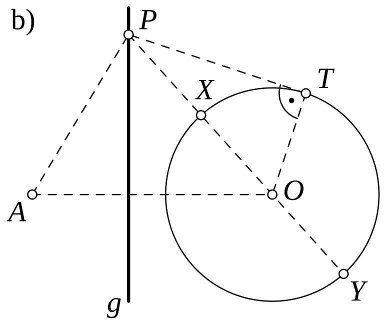
K.14 Ein fester Punkt A liege außerhalb eines Kreises $k \equiv O_r$. Für welche Punkte P der Ebene ist der Abstand PA gleich dem Tangentenabschnitt PT an den Kreis?

K.14 Ziehen wir die Tangentenabschnitte AT und AT' an den Kreis (Bild a), so gehören offensichtlich deren Mittelpunkte M bzw. M' wegen $MA = MT$ und $M'A = M'T'$ zu den gesuchten Punkten. Gibt es außer diesen beiden nun noch weitere Punkte? Etwas Herumexperimentieren bringt uns auf die Idee, daß es alle Punkte auf der Geraden $g(M, M')$ sein könnten. Nehmen wir also einen beliebigen Punkt $P \in g$ und bezeichnen die Schnittpunkte der Zentralen PO mit dem Kreis mit X, Y sowie den Berührungspunkt mit T (Bild b).





Dann gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz (oder nach dem Satz des PYTHAGORAS)

$$PT^2 = PX \cdot PY = (PO - r)(PO + r) = PO^2 - r^2 = \mathfrak{P}(T).$$

Dieser Ausdruck soll gleich PA^2 sein, somit folgt: $PO^2 - PA^2 = r^2 = \text{const.}$ Nach Aufgabe A.23 ist jedoch der geometrische Ort aller Punkte P, für die die Differenz der Quadrate der Abstände zu zwei festen Punkten O bzw. A konstant ist, eine Gerade. Somit ist die Lösungsmenge tatsächlich $g(M, M')$.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist ein Spezialfall der Aufgabe K.16, wobei ein Kreis zu einem Punkt (hier A mit $r_2 = 0$) entartet ist. g heißt auch *Potenzlinie* (des Kreises und von Punkt A).