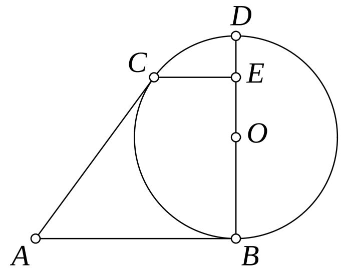
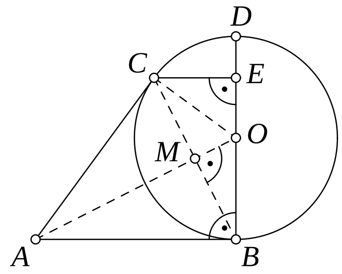
K.24 (Bild) AB und AC seien Tangenten an einen Kreis O_r mit den Berührungspunkten B und C. Weiterhin sei CE senkrecht zum Durchmesser BD. Man beweise:

a) $BE \cdot BO = AB \cdot CE$,

b) $\dfrac{AB}{\sqrt{BE}} = \dfrac{BO}{\sqrt{ED}}$.



K.24 *Beweis:* (Bild) a) Betrachten wir die behauptete Gleichung genauer, fällt auf, daß AB und BO Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABO sowie BE und CE diejenigen von $\triangle BEC$ sind. Könnten wir die Ähnlichkeit beider Dreiecke nachweisen, wäre der Beweis schon erbracht. Zeichnen wir dazu die Strecken AO, CO und BC in unsere Planfigur ein und nennen $M \equiv AO \cap BC$, dann ist wegen $AB = AC$ (gleiche Tangentenabschnitte), $BO = CO$ (gleiche Radien) und $\measuredangle ABO = \measuredangle ACO = 90°$: $\triangle ABO \cong \triangle ACO$, und AO ist Mittelsenkrechte von BC. Die rechtwinkligen Dreiecke ABO und BMO haben den Winkel bei O gemeinsam; demzufolge ist



$$\measuredangle BAO = \measuredangle MBO = \measuredangle CBE.$$

Daraus folgt $\triangle ABO \sim \triangle BEC$, also

$$\frac{AB}{BO} = \frac{BE}{CE} \qquad \text{oder} \qquad BE \cdot BO = AB \cdot CE. \tag{K.104}$$

b) Aus dem Höhensatz folgt $CE = \sqrt{BE} \cdot \sqrt{ED}$. Dies in die erste Gleichung in (K.104) eingesetzt und beide Seiten mit $\frac{BO}{\sqrt{BE}}$ multipliziert, ergibt die zweite Gleichung. □