K.31 Man zeige, daß durch eine Inversion am Kreis $\Gamma \equiv O_r$

a) eine Gerade durch O	in eine Gerade durch O,
b) eine Gerade, die nicht durch O geht	in einen Kreis durch O,
c) ein Kreis durch O	in eine Gerade, die nicht durch O geht,
d) ein Kreis, der nicht durch O geht	in einen Kreis, der nicht durch O geht,

überführt wird (Bild K.3). Der Fall d) heißt auch

Vietascher Satz. Die inverse Figur eines Kreises, der nicht durch den Inversionsmittelpunkt geht, ist wieder ein Kreis.

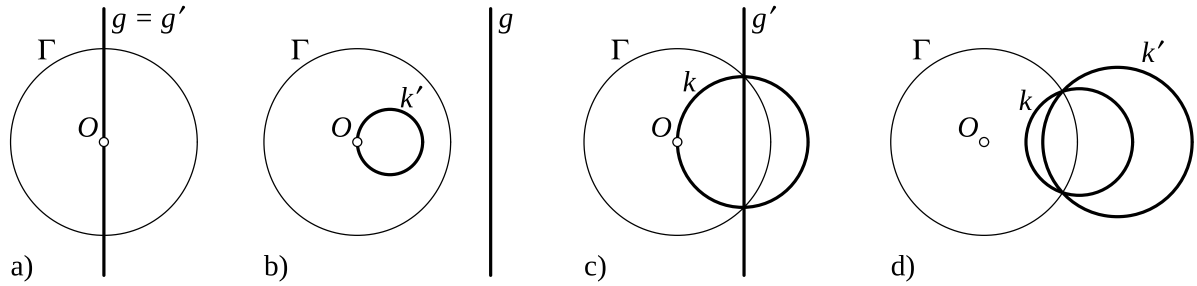
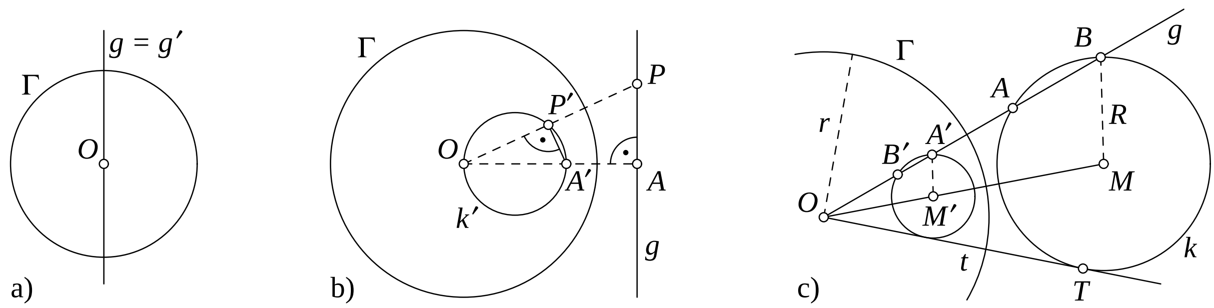


Bild K.3 Inversion von Geraden und Kreisen

K.31 *Beweis:* Die Behauptung a) ist selbstverständlich, da nach der Definition der Inversion jeder Punkt auf der Geraden durch O in einen anderen Punkt derselben Geraden abgebildet wird (Bild a). Auch wenn die Punkte ausgetauscht werden, bleibt die Gerade als Ganzes erhalten. Um b) zu beweisen, fällen wir das Lot von O auf die Gerade g; dessen Fußpunkt sei A und der inverse Punkt sei A' (Bild b). Wir wählen ferner einen beliebigen Punkt P auf g, und es sei P' der zugehörige inverse Punkt. Wegen $OA \cdot OA' = OP \cdot OP' = r^2$ folgt

$$\frac{OA'}{OP'} = \frac{OP}{OA},$$

die beiden Dreiecke $OP'A' \sim OAP$ sind also ähnlich. Da $\measuredangle OAP = 90°$, ist auch $\measuredangle OP'A' = 90°$, und P' liegt demzufolge auf dem THALES-Kreis k' mit dem Durchmesser OA'. Hiermit ist b) bewiesen. Die Behauptung c) folgt aus der Tatsache, daß, wenn wie im Fall b) k' invers zu g ist, auch g invers zu k' sein muß. Es bleibt noch die Behauptung d), der VIETAsche Satz. Sei $k \equiv M_R$



irgendein Kreis, der nicht durch O geht (Bild c). Um sein Bild zu finden, ziehen wir eine Gerade g durch O, die k in A und B schneidet, und untersuchen, wie sich die Bilder A', B' ändern, wenn g den Kreis k in allen möglichen Lagen schneidet. Es gilt nun $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$ nach der Definition der Inversion sowie $OA \cdot OB = t^2$ nach dem Sekanten-Tangentensatz (s. Aufgabe K.13), wenn $t \equiv OT$ die Länge des Tangentenabschnitts von O an k ist. Dividieren wir die erste Beziehung durch die zweite, erhalten wir

$$\frac{OA'}{OB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{r^2}{t^2} \equiv \lambda, \tag{K.105}$$

wobei λ eine Konstante ist, die nur von r und t abhängt und für alle Lagen von A, B denselben Wert hat. Wir ziehen nun durch A' eine Parallele zu BM, die OM in M' schneidet. Dann ist nach den Strahlensätzen

$$\frac{OM'}{OM} = \frac{OA'}{OB} = \frac{A'M'}{R}, \quad OM' = \frac{OM \cdot OA'}{OB} = OM \cdot \lambda, \quad A'M' = R \cdot \frac{OA'}{OB} = R \cdot \lambda.$$

Das bedeutet, daß für jede Lage von A und B der Punkt M' stets derselbe Punkt auf OM ist und der Abstand $A'M'$ immer denselben Wert hat. Ebenso ist wegen (K.105) auch $B'M' = A'M'$, d. h., die Bilder aller möglichen Punkte A, B auf k sind Punkte, deren Abstand von M' konstant ist; mithin ist das Bild von k ein Kreis. □