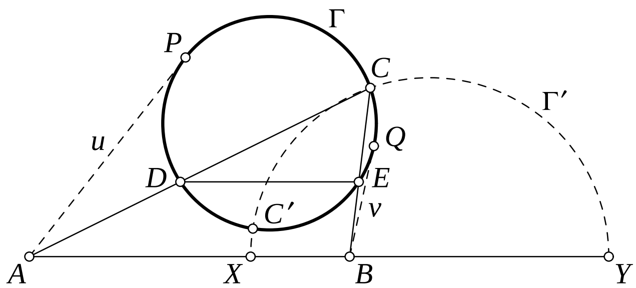
K.72 Die Punkte A und B liegen außerhalb eines gegebenen Kreises Γ. Gesucht ist ein Punkt C auf Γ mit der folgenden Eigenschaft: AC und BC schneiden Γ ein weiteres Mal in D bzw. E, wobei $DE \parallel AB$ gelten soll.
(*Crux Mathematicorum 2430*, April 1999)

K.72 (Bild) $AP \equiv u$ und $BQ \equiv v$ seien die Tangentenabschnitte von A bzw. B an den Kreis Γ. Nach dem Sekanten-Tangentensatz gelten die Gleichungen $u^2 = AC \cdot AD$ und $v^2 = BC \cdot BE$, deren gegenseitige Division



$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BE}$$

ergibt. Da $DE \parallel AB$ gefordert ist, gilt außerdem nach dem ersten Strahlensatz $AC/BC = AD/BE$ und daher mit obiger Gleichung

$$\frac{AC}{BC} = \frac{u}{v} \equiv q.$$

Nun sind A, B und Γ fest, so daß das Verhältnis q eine bekannte Konstante ist. Der geometrische Ort aller Punkte C, dessen Entfernungen zu zwei Punkten A und B ein konstantes Verhältnis haben, ist bekanntlich der Kreis des Apollonius (vgl. Aufgabe A.22). Somit haben wir lediglich die Strecke AB innerlich und äußerlich im Verhältnis q zu teilen (s. *Bemerkung 2* zur Lösung von Aufgabe A.12), um die Punkte X und Y als Durchmesser des Apollonius-Kreises Γ' zu bestimmen. Die Schnittpunkte von Γ und Γ' sind also die gesuchten Punkte C (bzw. C'), wobei es sein kann, daß der zweite Schnittpunkt (im Bild C') herausfällt, da er keine Schnittpunkte D und E mit Γ zuläßt.