L.12 Gegeben seien n Teilmengen der Menge $M = \{1, 2, 3, \ldots, 105\}$ mit jeweils 14 Elementen, so dass jeweils zwei der Mengen genau ein gemeinsames Element haben, aber keine drei Mengen ein Element gemeinsam haben. Man zeige: Ist jedes Element von M in wenigstens einer der Teilmengen enthalten, so ist $n = 14$ oder $n = 15$.

L.12 *Beweis:* Die Bedingungen liefern nach dem Prinzip des Ein- und Ausschlusses die Gleichung $105 = 14n - \binom{n}{2}$ mit den genannten Lösungen. Das hier auch wirklich die geforderten Teilmengen existieren, zeigt man, indem man die entsprechenden Mengen einfach angibt:

$$
\begin{aligned}
&M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 14\},\\
&M_2 = \{1, 15, 16, 17, 18, \dots, 27\},\\
&M_3 = \{2, 15, 28, 29, 30, \dots, 39\},\\
&M_4 = \{3, 16, 28, 40, 41, \dots, 50\},\\
&M_5 = \{4, 17, 29, 40, 51, \dots, 60\},\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&M_{14} = \{13, 26, 38, 49, 60, \dots, 105\},\\
&(M_{15} = \{14, 27, 39, 50, 60, \dots, 105\})\,. \quad \square
\end{aligned}
$$