L.1 Aussagenlogik

Eine *Aussage* A soll eine Zeichenfolge sein, der entweder der Wahrheitswert *wahr* oder *falsch* zugeschrieben werden kann, wie zum Beispiel „$2-1=1$“ oder „Es regnet gerade“. Im Gegensatz dazu sind zum Beispiel „$3 \cdot x = 9$“ oder „Guten Morgen!“ keine Aussagen in diesem Sinne. Durch Einsetzen eines sogenannten *Prädikates* x kann man aber die erste Zeichenfolge zu einer Aussage machen.

Aussagen kann man miteinander zu komplizierteren Aussagen verknüpfen. Dazu verwendet man sogenannte *Junktoren*. Die bekanntesten werden meist wie folgt abgekürzt:

$\neg A$	für „nicht A“ (Negation),
$A \wedge B$	für „A und B“ (Konjunktion),
$A \vee B$	für „A oder B “ (Alternative),
$A \Rightarrow B$	für „wenn A, dann B“ (Implikation) und
$A \Leftrightarrow B$	für „A genau dann, wenn B“ (Äquivalenz).

Auch wenn dies alles noch recht einfache Sachverhalte sind, beinhaltet letzteres doch einen der häufigsten Fehler beim Lösen von Wettbewerbsaufgaben, nämlich das Vergessen einer *Probe* am Schluss. Oft macht man beim Umformen von Gleichungen die Lösungsmenge möglicherweise größer (sog. *nicht äquivalente* Umformungen) und darf dann nur den einfachen Folgepfeil $A \Rightarrow B$ verwenden.

Beispiel 1: Hat man die Gleichung $x^2 = -1$ in reellen Zahlen zu lösen, so kann man durch Quadrieren folgende, logisch richtige Kette bilden:

$$x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Da man hier keine „genau dann, wenn“-Aussagen hat, heißt dies aber nur, dass die einzigen *möglichen* Lösungen der eingangs genannten Gleichung $x = \pm 1$ sind. Eine Probe ist also unbedingt nötig; sie zeigt hier, dass die quadratische Gleichung in Wirklichkeit gar keine (reelle) Lösung hat.

Man muss also stets darauf achten, ob zwischen Aussagen wirklich ein Äquivalenzpfeil $\Leftrightarrow$ oder nur ein Folgepfeil $\Rightarrow$ gehört. Im Zweifelsfall ist eine Probe also immer ratsam.

Um den Wahrheitsgehalt solcher Aussagenverknüpfungen festzustellen, belegt man oft in einer *Wahrheitstafel* die Teilaussagen mit allen möglichen Wertekombinationen von wahr (0) und falsch (1)[†] und betrachtet dabei den Wahrheitsgehalt der gesamten Aussage. Für den Junktor $\neg$ findet man einfach:

A	$\neg A$
1	0
0	1

Wichtig (und als einziges nicht sofort einsichtig) ist die Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

[†]Es ist dabei völlig egal und damit Geschmackssache, ob man die Abkürzungen „w“/„f“ oder „0“/„1“ für wahr/falsch benutzt; wir bleiben bei letzterem.

Beispiel 2: Die Aussage „Wenn es regnet, ist die Straße nass“ ist nur dann falsch, wenn es

Beispiel 3: Andererseits ist folgende Aussage stets wahr: „Wenn Weihnachten und Ostern auf einen Tag fallen, dann besteht die Woche nur aus Sonntagen."

Weitere oft benutzte logische Zeichen sind die *Quantoren* „$\exists$" für „es existiert ein ..." und „$\forall$" für „für alle ...". Damit kann man zum Beispiel die Aussage „$\forall\, n \in \mathbb{N} : \exists\, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$" bilden, die nichts weiter aussagt, als dass es für jede natürliche Zahl n eine natürliche Zahl m gibt, die größer als n ist.

Junktoren, insbesondere solche wie $\wedge$ und $\vee$ sollten aber immer nur in mathematisch sinnvollem Zusammenhang verwendet werden. Nicht im Sinne des Erfinders ist ein Gebrauch á la „Michael fängt an $\wedge$ gewinnt $\vee$ Katja hat Glück $\wedge$ darf aufhören!"