

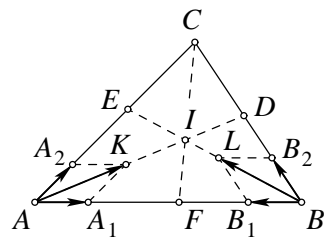
M.1 Von einem Dreieck seien die Ortsvektoren der Eckpunkte gegeben. Man finde einen Ausdruck für die Lage des Inkreismittelpunktes I .

M.1 (Bild) Betrachten wir I als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle CAB$ und $\angle CBA$. Beide Winkelhalbierenden fallen mit den Diagonalen AK bzw. BL zweier Rhomben AA_1KA_2 bzw. BB_2LB_1 zusammen, deren Seiten parallel zu den jeweiligen Dreieckseiten sind und die Länge 1 haben:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{c} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{b}.$$

Für den Ortsvektor zum Inkreismittelpunkt können wir somit

$$\mathbf{i} = \mathbf{a} + \lambda \left(\frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{c} + \frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{b} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$



mit einem im weiteren zu bestimmenden reellen Parameter λ schreiben. Analog finden wir vom Eckpunkt B ausgehend

$$\mathbf{i} = \mathbf{b} + \mu \left(\frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{a} + \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{c} \right), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Gleichsetzen beider Ausdrücke für \mathbf{i} ergibt folgende Vektorgleichung:

$$\left(1 - \frac{b+c}{bc}\lambda - \frac{\mu}{c} \right) \mathbf{a} + \left(\frac{\lambda}{c} - 1 + \frac{c+a}{ca}\mu \right) \mathbf{b} + \left(\frac{\lambda}{b} - \frac{\mu}{a} \right) \mathbf{c} = 0.$$

Da \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} linear unabhängig sind, muß jeder (reelle) Klammerausdruck vor den Vektoren einzeln null sein, damit die Gleichung erfüllt ist. Diese Bedingungen stellen ein (überbestimmtes) lineares Gleichungssystem für die unbekannt Parameter λ , μ dar, welches die Lösung

$$\lambda = \frac{bc}{a+b+c}, \quad \mu = \frac{ca}{a+b+c}$$

hat. Dies schließlich liefert den gewünschten Ausdruck

$$\mathbf{i} = \frac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{a+b+c},$$

der ebenso wie derjenige für den Schwerpunkt \mathbf{g} bemerkenswert symmetrisch ist.

Bemerkung: Bezeichnen wir die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den gegenüberliegenden Seiten mit D , E , F , so finden wir leicht die mitunter nützlichen Ausdrücke

$$\mathbf{d} = \frac{b\mathbf{b} + c\mathbf{c}}{b+c}, \quad \mathbf{e} = \frac{c\mathbf{c} + a\mathbf{a}}{c+a}, \quad \mathbf{f} = \frac{a\mathbf{a} + b\mathbf{b}}{a+b}.$$