$\boxed{\text{M.11}}$ Zeige, daß für alle Punkte P auf dem Umkreis eines Dreiecks ABC der Ausdruck

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 - PH^2$$

eine Konstante ist, wobei H der Höhenschnittpunkt ist.

M.11 *Beweis:* Hier macht sich ein „Umweg" über den Umkreismittelpunkt O mittels $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$ und $OA = OB = OC = PO = R$ bezahlt, denn:

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= 6\,R^2 + 2\,\overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= 6\,R^2 + 2\,\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OH}, \end{aligned}$$

wobei (M.2) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ benutzt wurde. Außerdem ist

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OH} \quad \Longrightarrow \quad PH^2 = R^2 + OH^2 + 2\,\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OH} \\ &\Longrightarrow \quad 2\,\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OH} = PH^2 - R^2 - OH^2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &PA^2 + PB^2 + PC^2 = 6\,R^2 + PH^2 - R^2 - OH^2, \\ &PA^2 + PB^2 + PC^2 - PH^2 = 5R^2 - OH^2 = \text{const}, \end{aligned}$$

da unabhängig von P. $\square$