$\boxed{\text{M.13}}$ **(Verallgemeinerte) Leibniz-Identität.** P sei ein Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC sowie M ein beliebiger Punkt im Raum. Mit den Seitenlängen a, b, c und

$$\overrightarrow{MP} = \frac{x_1 \overrightarrow{MA} + x_2 \overrightarrow{MB} + x_3 \overrightarrow{MC}}{x_1 + x_2 + x_3}, \qquad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

als gewichtetem Mittel gilt dann:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3)^2 \, MP^2 = {} & (x_1 + x_2 + x_3) \left(x_1 MA^2 + x_2 MB^2 + x_3 MC^2\right) \\ & - \left(x_2 x_3 a^2 + x_3 x_1 b^2 + x_1 x_2 c^2\right)\end{aligned} \tag{M.6}$$

M.13 *Beweis:* Wir brauchen nur die Voraussetzung auf beiden Seiten zu quadrieren und einige algebraische Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned}
(x_1+x_2+x_3)^2\,MP^2 &= \left(x_1\overrightarrow{MA}+x_2\overrightarrow{MB}+x_3\overrightarrow{MC}\right)^2 = x_1^2\,MA^2+x_2^2\,MB^2+x_3^2\,MC^2\\
&\quad + 2x_2x_3\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+2x_3x_1\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}+2x_1x_2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\\
&= (x_1+x_2+x_3)\left(x_1MA^2+x_2MB^2+x_3MC^2\right)-x_2x_3(MB^2+MC^2-2\,\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC})\\
&\quad - x_3x_1(MC^2+MA^2-2\,\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA})-x_1x_2(MA^2+MB^2-2\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB})\\
&= (x_1+x_2+x_3)\left(x_1MA^2+x_2MB^2+x_3MC^2\right)-x_2x_3\,|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|^2\\
&\quad - x_3x_1\,|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}|^2-x_1x_2\,|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|^2\\
&= (x_1+x_2+x_3)\left(x_1MA^2+x_2MB^2+x_3MC^2\right)-(x_2x_3a^2+x_3x_1b^2+x_1x_2c^2). \quad \square
\end{aligned}$$