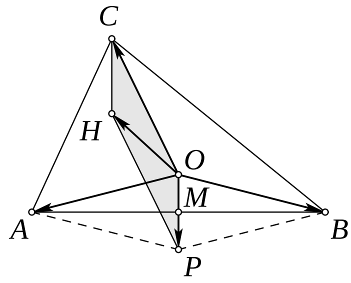
M.2 In allen Dreiecken ABC gilt mit dem Umkreismittelpunkt O und Höhenschnittpunkt H:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}, \qquad \text{(M.2)}$

b) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\,\overrightarrow{HO}. \qquad \text{(M.3)}$

M.2 *Beweis:* (Bild) a) Spiegeln wir das gleichschenklige Dreieck OAB an der Seite AB, entsteht der Rhombus $OAPB$. Die Vektorsumme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ist somit gleich $\overrightarrow{OP}$, einer der beiden Diagonalen des Rhombus. Da sich die beiden Diagonalen OP und AB in ihrem Schnittpunkt M halbieren, gilt nach Aufgabe D.93:



$$OP = 2\,OM = CH.$$

Wegen $CH \parallel OP$ ist $CHPO$ ein Parallelogramm und OH dessen Diagonale. Mithin gilt:

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}. \ \square$$

Teil b) folgt sofort aus Teil a), wenn wir die „Umwege“ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}$ usw. betrachten:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} \\ \Longrightarrow \quad & \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\,\overrightarrow{HO}. \ \square \end{aligned}$$