$\boxed{\textsf{M.3}}$ Man beweise unter Verwendung von Vektoren:

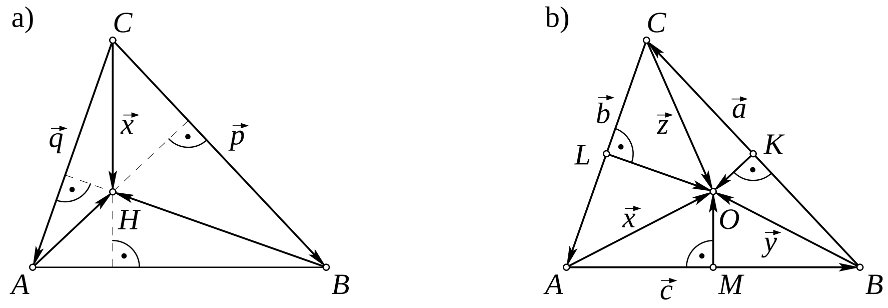
a) Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

b) Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

M.3 *Beweise:* a) Es sei $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{CB}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{CA}$ sowie $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{CH}$, wobei $H$ zunächst der Schnittpunkt der beiden Höhen durch $A$ und $B$ sei (Bild a). Dann gilt, da die Höhen senkrecht auf den Seiten stehen:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{q} = 0, \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{p} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = 0.$$

Die letzte Gleichung sagt uns, daß die Gerade $CH$ senkrecht auf $AB$ steht, also auch eine Höhe ist. Mithin ist $H$ tatsächlich der Schnittpunkt der drei Höhen. $\square$




b) Wir verwenden die Vektoren wie im Bild b) gezeigt, wobei $KLM$ das Seitenmittendreieck ist. Aus $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 2\,\overrightarrow{KO}$ folgt durch skalare Multiplikation: $\boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{z}^2 = 0$ oder $|\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{z}|$. Ebenso folgt aus $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x} = 2\,\overrightarrow{LO}$ die Beziehung $|\boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{x}|$. Somit gilt auch $|\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}|$. Nun ist

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 2\,\overrightarrow{MO} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2 = 2\,\boldsymbol{c} \cdot \overrightarrow{MO}.$$

Die linke Seite der Gleichung ist null, also ist auch $\boldsymbol{c} \cdot \overrightarrow{MO} = 0$. Da weder $\boldsymbol{c}$ noch $\overrightarrow{MO}$ vom Betrage null sind, folgt $\boldsymbol{c} \perp \overrightarrow{MO}$. Die Mittelsenkrechten $\overrightarrow{KO}$, $\overrightarrow{LO}$, $\overrightarrow{MO}$ schneiden einander in einem Punkt. $\square$