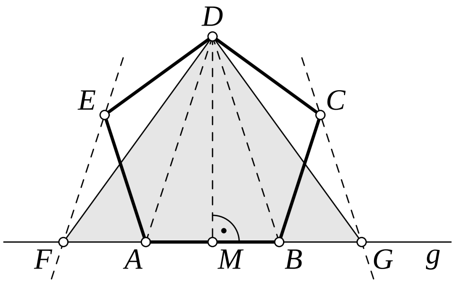
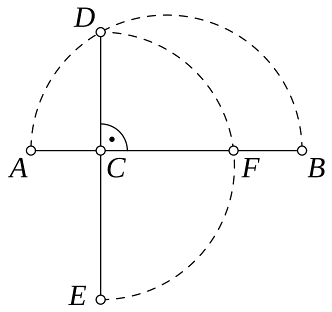
$\boxed{\textsf{M.41}}$ Man verwandle ein gegebenes regelmäßiges Fünfeck in ein flächengleiches Dreieck.

M.41 Wir wählen die Gerade g durch die Seite AB des regelmäßigen Fünfecks als Basislinie unserer ersten Verwandlung (Bild a). Die Eckpunkte C und E bringen wir zum Verschwinden, indem die Parallelen zu AD durch E und BD durch C mit g zum Schnitt gebracht werden. Offensichtlich ist dann $[DFA] = [DEA] = [DCB] = [DGB]$, womit wir das Fünfeck bereits in das (gleichschenklige) Dreieck DFG verwandelt haben.

a)



b)



Im zweiten Teil ist letzteres in ein gleichseitiges Dreieck zu verwandeln. Dazu müssen wir etwas rechnen: $\triangle DFG$ möge Schenkel der Länge $DF = DG = b$, die Höhe $DM = h$ sowie die Basislänge $FG = c$ haben, unser gleichseitiges Dreieck die Seitenlänge a. Dann gilt mit den bekannten Flächenformeln und dem Satz des PYTHAGORAS

$$2\Delta = ch = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \qquad \text{und} \qquad b^2 = h^2 + \frac{c^2}{4}.$$

Eliminieren wir h aus beiden Gleichungen, erhalten wir nach kurzer Rechnung:

$$a^2 = c\sqrt{\frac{(2b+c)(2b-c)}{3}} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c}{2}\sqrt{\left(\frac{2b+c}{4}\right)\cdot\left(\frac{2b-c}{3}\right)}. \tag{M.105}$$

Mit Hilfe von Aufgabe **A.14** finden wir problemlos eine Konstruktion von $\frac{1}{2}a$ (Bild b†).
Erklärung: Die Wurzel in (M.105) ist die mittlere Proportionale CD aus den Faktoren AC und BC; das gesuchte $\frac{1}{2}a = CF$ ebenso mittlere Proportionale aus CD und $CE = \frac{1}{2}c$.

† Der einzige Grund, warum wir $a/2$ anstelle a konstruieren, ist, daß das maßstabgerechte Bild b sonst zu groß geworden wäre.