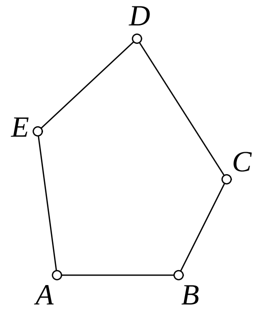
M.42 (Bild) Im Innern eines Fünfecks $ABCDE$ sollen alle diejenigen Punkte P gefunden werden, für die das Viereck $ABCP$ einen ebenso großen Flächeninhalt wie das Fünfeck $CDEAP$ hat. a) Man beschreibe eine von den gegebenen Eckpunkten des Fünfecks ausgehende Konstruktion, mit der sich eine Menge von Punkten P ergibt. b) Beweisen Sie, daß jeder Punkt P, der sich aus dieser Konstruktion ergibt, die Bedingung der Flächengleichheit erfüllt.
(*36. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 10, Stufe 3*)



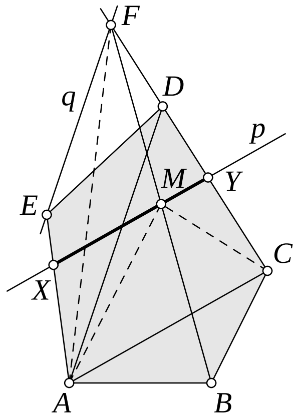
M.42 (Bild) Die Aufgabe vereinfacht sich, wenn das Fünfeck $ABCDE$ in ein flächengleiches Viereck verwandelt wird. Das dabei entstehende Viereck kann dann in zwei Dreiecke zerlegt werden, die sich einfach in ihrem Flächeninhalt halbieren lassen.

a) Man gelangt damit zu folgender *Konstruktion:*

1. Es wird die Parallele q zu AD durch E konstruiert und mit der Verlängerung von CD im Punkt F zum Schnitt gebracht.

2. Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke BF.

3. Es wird die Parallele p zu AC durch M konstruiert. Sie schneidet die Fläche des Fünfecks $ABCDE$ in einer Strecke XY.



Als Ergebnis der Konstruktion erhält man auf dieser Strecke zwischen X und Y die Menge aller Punkte P.

b) *Beweis:* Nach *3.* ist $PM \parallel AC$, daher hat das Dreieck ACP den gleichen Flächeninhalt wie $\triangle ACM$. Also sind die Vierecke $ABCP$ und $ABCM$ flächengleich. Die Fläche von $ABCM$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABM und BCM. Nach *2.* haben diese Dreiecke jeweils einen halb so großen Flächeninhalt wie $\triangle ABF$ und $\triangle BCF$. Also ist das Viereck $ABCP$ halb so groß wie $ABCF$. Nach *1.*, also $EF \parallel AD$, hat das Dreieck ADF den gleichen Flächeninhalt wie $\triangle ADE$ und folglich $ABCF$ den gleichen Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$. Somit ist der Flächeninhalt von $ABCP$ halb so groß wie der von $ABCDE$ und daher so groß wie der von $CDEAP$. $\square$