

- M.5** In einem Viereck stehen die Diagonalen genau dann senkrecht aufeinander, wenn
- a) die Summe der Quadrate gegenüberliegender Seiten gleich ist,
Ladies diary, 1757 [Ley17, vol. 3]
 - b) die Mittellinien (das sind die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten) gleich lang sind.

M.5 *Beweis:* Die Bedingung, daß die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, lautet in Vektorschreibweise

$$(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{d}) = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} - \mathbf{bc} - \mathbf{ad} = 0. \quad (\text{M.102})$$

a) Für die andere Bedingung finden wir entsprechend

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{d})^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{d})^2,$$

die ausmultipliziert auf

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(\mathbf{ab} + \mathbf{cd}) &= b^2 + c^2 + a^2 + d^2 - 2(\mathbf{bc} + \mathbf{ad}) \quad \text{oder} \\ \mathbf{ab} + \mathbf{cd} &= \mathbf{bc} + \mathbf{ad} \end{aligned}$$

führt. Dies ist identisch mit (M.102); beide Gleichungen lassen sich also durch äquivalente Umformungen ineinander überführen. b) Ähnlich wie unter a) läßt sich hier die Gleichung

$$\left| \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} - \frac{\mathbf{c} + \mathbf{d}}{2} \right| = \left| \frac{\mathbf{b} + \mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{d}}{2} \right| \quad \text{bzw.} \quad |\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}| = |\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{d}|$$

aufstellen. Wenn die Längen gleich sein sollen, müssen auch deren Quadrate gleich sein:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d})^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{d})^2.$$

Weiteres Ausmultiplizieren und Vereinfachen führt ebenfalls auf (M.102). \square