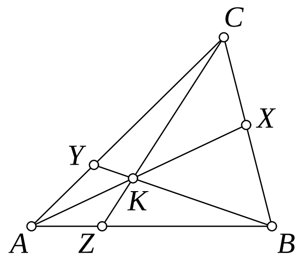
M.56 **Satz von Euler-Gergonne.** (Bild) Für die Teilungsverhältnisse $u \equiv AK/KX$, $v \equiv BK/KY$, $w \equiv CK/KZ$ dreier sich in K schneidender Ecktransversalen eines Dreiecks ABC gilt:

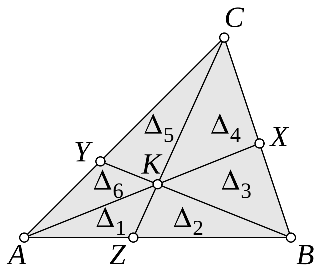
$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1. \tag{M.9}$$



M.56 *Beweis:* (Bild) Die zu beweisende Gleichung diktiert uns, wie wir vorzugehen haben: Für die Teilungsverhältnisse u, v, w lesen wir folgende Flächenverhältnisse ab:

$$u = \frac{AK}{KX} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_3} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_4}, \qquad v = \frac{BK}{KY} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4}{\Delta_5} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta_6},$$

$$w = \frac{CK}{KZ} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta_1} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4}{\Delta_2}.$$



Somit folgt mit $\Delta = \sum_i \Delta_i$

$$\frac{1}{1+u} = \frac{\Delta_3}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3} = \frac{\Delta_4}{\Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6} = \frac{\Delta_3 + \Delta_4}{\Delta},$$

$$\frac{1}{1+v} = \frac{\Delta_5}{\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5} = \frac{\Delta_6}{\Delta_6 + \Delta_1 + \Delta_2} = \frac{\Delta_5 + \Delta_6}{\Delta},$$

$$\frac{1}{1+w} = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_5 + \Delta_6} = \frac{\Delta_2}{\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{\Delta}.$$

Die Summe der rechts stehenden Terme ist – wie behauptet – eins. □

Bemerkung: Die angegebene Gleichung läßt sich auch so schreiben: $uvw = u + v + w + 2$.