$\boxed{\textsf{M.6}}$ Für vier beliebige Punkte A, B, C, D im Raum gilt:

$$\text{a)}\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \tag{M.4}$$

$$\text{b)}\ BC^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2 = 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}. \tag{M.5}$$

M.6 *Beweise:* a) Schreiben wir für $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ usw., dann ist nach dem Ausmultiplizieren zu erkennen, daß alle Kombinationen von Skalarprodukten genau einmal mit positivem und negativem Vorzeichen auftreten, d. h., die Summe ist null.
Bemerkung: Setzen wir $D = H$, so folgt:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Sei H der Schnittpunkt der Höhen CH und BH, so sind beide Skalarprodukte auf der linken Seite der Gleichung null (da die Höhen senkrecht auf den Seiten AB und AC stehen), woraus $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ folgt. D. h., alle drei Höhen schneiden sich in *einem* Punkt. b) Es ist

$$\begin{aligned} BC^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2 &= (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d})^2 - (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{d})^2 \\ &= 2\,(\boldsymbol{cd} + \boldsymbol{ab} - \boldsymbol{bc} - \boldsymbol{ad}) \\ &= 2\,(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{b}) \\ &= 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}. \quad \square \end{aligned}$$