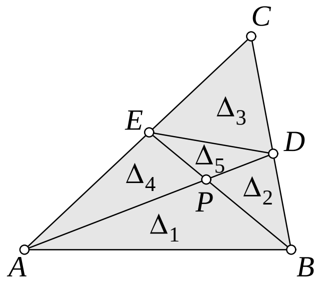
M.60 In einem Dreieck ABC schneiden sich die Ecktransversalen AD und BE in P. Man beweise, daß dann folgende Gleichung gilt:

$$[ABC] \cdot [DPE] = [APB] \cdot [CDE].$$

(*Crux Mathematicorum 2367*, Oktober 1998)

M.60 *Beweis:* (Bild) Schreiben wir für die fünf Teildreiecke wie im Bild angegeben Δ_i mit $i = 1, 2, \ldots, 5$, so ist zu zeigen:

$$[\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5]\Delta_5 = \Delta_1\Delta_3. \tag{M.109}$$



Der Satz der gemeinsamen Höhen, angewandt auf die Dreiecke CED, EAD bzw. CEB, EAB, ergibt

$$\frac{CE}{EA} = \frac{\Delta_3}{\Delta_4 + \Delta_5} = \frac{\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_5}{\Delta_1 + \Delta_4} \quad \text{bzw.}$$

$$\Delta_2\Delta_4 + \Delta_2\Delta_5 + \Delta_3\Delta_4 + [\Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5]\Delta_5 = \Delta_1\Delta_3 + \Delta_3\Delta_4. \tag{M.110}$$

Aus dem Viereck $ABDE$ lesen wir mit dem Fliegen-Satz (vgl. Bemerkung in der Lösung zu Aufgabe M.52) unmittelbar die Relation $\Delta_2\Delta_4 = \Delta_1\Delta_5$ ab, welche in (M.110) eingesetzt und nach Subtraktion von $\Delta_3\Delta_4$ die Behauptung (M.109) liefert. $\square$