

M.61 P sei ein beliebiger Punkt im Innern eines Dreiecks ABC . Die Verlängerungen von AP , BP und CP schneiden die jeweils gegenüberliegenden Dreiecksseiten in den Punkten X , Y bzw. Z . Man beweise folgende Ungleichung:

$$\frac{PA}{PX} \cdot \frac{PB}{PY} + \frac{PB}{PY} \cdot \frac{PC}{PZ} + \frac{PC}{PZ} \cdot \frac{PA}{PX} \geq 12.$$

([Wil96], No. 46)

M.61 *Beweis:* Mit den bisher üblichen Abkürzungen $u = PA/PX$, $v = PB/PY$, $w = PC/PZ$ lautet die zu beweisende Ungleichung $uv + vw + wu \geq 12$. Nun gilt nach dem Satz von EULER-GERGONNE (s. Aufgabe **M.56**)

$$\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} = 1 \quad \text{oder} \quad uvw = u + v + w + 2; \quad (\text{M.111})$$

die darin auftretende Summe von Reziproken läßt sich mit der AM-HM-Ungleichung (vgl. Aufgabe **U.17**) abschätzen:

$$(1+u+1+v+1+w) \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{1+w} \right) \geq 9. \quad (\text{M.112})$$

Einsetzen von (M.112) in (M.111) liefert zunächst

$$u + v + w \geq 6, \quad \text{und} \quad uvw \geq 8. \quad (\text{M.113})$$

Für den letzten Schritt wenden wir die AM-GM-Ungleichung (vgl. Aufgabe **U.15**) in Verbindung mit dem Zwischenergebnis (M.113) an:

$$uv + vw + wu \geq 3(uvw)^{\frac{2}{3}} \geq 3 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 12. \quad \square$$