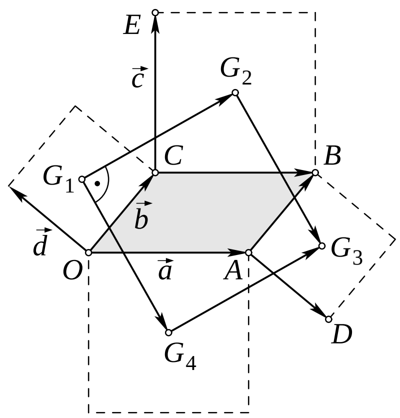
$\boxed{\text{M.7}}$ Die Mittelpunkte der vier Quadrate, die über den Seiten eines Parallelogramms nach außen errichtet werden, bilden die Eckpunkte eines Quadrats.
(*10. Mathematik-Olympiade 1970/71, Klasse 10, Stufe 1*)

M.7 *Beweis:* (Bild) Das Parallelogramm sei $OABC$; wir bezeichnen die Vektoren, die das Parallelogramm aufspannen mit $\overrightarrow{OA} \equiv \boldsymbol{a}$ und $\overrightarrow{OC} \equiv \boldsymbol{b}$, die dazu senkrechten Vektoren mit $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{d}$. Für die Mittelpunkte der Aufsatzquadrate, die gleichzeitig deren Schwerpunkte sind, können wir aus dem Bild die Gleichungen



$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}), \quad \overrightarrow{OG_2} = \boldsymbol{b} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}),$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}), \quad \overrightarrow{OG_4} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$$

ablesen. Daraus folgt durch Differenzbildung

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}) = \overrightarrow{G_4G_3} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{G_1G_4} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}) = \overrightarrow{G_2G_3}.$$

Damit ist schon nachgewiesen, daß $G_1G_2G_3G_4$ ein Parallelogramm ist. Um zu zeigen, daß es sogar ein Quadrat ist, genügt es, $\overrightarrow{G_1G_2} \cdot \overrightarrow{G_1G_4} = 0$ (rechter Winkel) und $|\overrightarrow{G_1G_2}| = |\overrightarrow{G_1G_4}|$ (gleiche Länge) zu überprüfen. Für das Skalarprodukt erhalten wir:

$$\overrightarrow{G_1G_2} \cdot \overrightarrow{G_1G_4} = \frac{1}{4}\big[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big]\cdot\big[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big] = \frac{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2}{4}.$$

Nun gilt offenbar $\triangle OAD \cong OCE$ nach Kongruenzsatz SWS wegen $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{d}|$ und $\measuredangle OAD = \measuredangle OCE$; also $OD = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}| = OE = |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|$ und daher $\overrightarrow{G_1G_2} \cdot \overrightarrow{G_1G_4} = 0$. Schließlich ist

$$|\overrightarrow{G_1G_2}|^2 = \frac{1}{4}\big[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big]^2 = \frac{1}{4}\left[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2+2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\right],$$
$$|\overrightarrow{G_1G_4}|^2 = \frac{1}{4}\big[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\big]^2 = \frac{1}{4}\left[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})^2+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\right].$$

Beide Ausdrücke sind gleich, wenn

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{bd}-\boldsymbol{cd} = 0,$$

welches tatsächlich wegen $\boldsymbol{ac} = 0$ und $\boldsymbol{bd} = 0$ (da $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{d}$) sowie $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{cd}$ (da $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{c}|$, $|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{d}|$ und $\measuredangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \measuredangle(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$) der Fall ist. $\square$