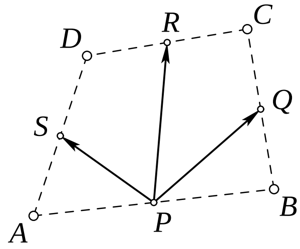
M.8 **Varignon-Parallelogramm.** Gegeben seien vier beliebige Punkte A, B, C und D im Raum. Man zeige, daß die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA ein *ebenes* Parallelogramm bilden.

M.8 *Beweis:* (Bild) Die Mittelpunkte P, Q, R, S der Verbindungsstrecken werden durch die Vektoren $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, $\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$ und $\frac{1}{2}(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})$ beschrieben, wenn wir die vier Punkte A, B, C, D durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ bezeichnen. Die Beweisidee ist nun folgende: $PQRS$ ist genau dann *planar*, falls die Dreiecke PQR und PQS in derselben Ebene liegen. Dies ist der Fall, wenn die Flächenvektoren, ausgedrückt durch die Vektorprodukte $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}$, *parallel* sind. Rechnen wir also die Vektoren aus:



$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}),$$
$$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$
$$\overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\right] = \frac{1}{2}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}),$$

woraus für das erste Vektorprodukt mit den Regeln der Vektoralgebra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} &= \frac{1}{4}\left[(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right] = \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})\right].\end{aligned}$$

folgt. Dies ist mit den obigen Gleichungen genau $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS}$. Beide Flächenvektoren sind also nicht nur parallel, sondern sogar gleich, was beweist, daß sich die Diagonalen halbieren und $PQRS$ demzufolge tatsächlich ein ebenes Parallelogramm ist. $\square$