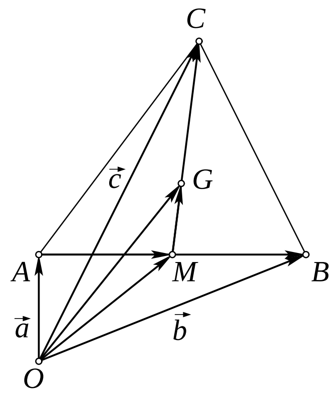
M.1 Vektorrechnung

Eine bestimmte Klasse von Aufgaben läßt sich besonders elegant mit den Hilfsmitteln der Vektorrechnung lösen. Ein *Vektor* kann als Translation eines Punktes A zum Punkt B betrachtet werden; wir bringen diese Verschiebung mit der Schreibweise $\overrightarrow{AB}$ zum Ausdruck. Ein Punkt der Ebene oder des Raumes spielt eine Sonderrolle: O (für *origin*); er dient als Ausgangs- oder Bezugspunkt. Eine Verschiebung von O nach A würden wir also mit $\overrightarrow{OA}$ oder kurz $\overrightarrow{A}$ bezeichnen, verwenden aber üblicherweise $\boldsymbol{a}$. Da mehrere Translationen auch nacheinander ausgeführt werden können, ist z. B. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ bzw. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. Von dieser Beziehung werden wir häufig Gebrauch machen.

Etwas verwirrend ist mitunter die benutzte Schreibweise. Z. B. ist mit BC^2 das Skalarprodukt $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=|BC|^2$ gemeint und *nicht* etwa die Ausdrücke $\overrightarrow{B}\overrightarrow{C}^2=\boldsymbol{BC}^2$ (welche ja Vektoren wären) oder $(\overrightarrow{B}\overrightarrow{C})^2=(\boldsymbol{BC})^2$ (welcher zwar ein Skalar ist, der aber nur im Falle $\boldsymbol{B}\parallel\boldsymbol{C}$ gleich BC^2 wäre). Wir müssen also genau zwischen (normal gesetzten) Skalaren und (fett gesetzten oder mit dem Vektorpfeil kenntlich gemachten) Vektoren unterscheiden (außer der bekannten Ausnahme $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=a^2$).

Der Vorteil der Einführung und konsequenten Verwendung von Vektoren zum Lösen von Aufgaben wird augenscheinlich, wenn wir lediglich die *formalen* Rechenregeln ausnutzen und uns nicht auf eine Darstellung der Vektoren in Komponenten (etwa in einem kartesischen Koordinatensystem) einlassen. Dadurch unterscheidet sich diese Herangehensweise von der analytischen Geometrie. Dazu ist natürlich die Kenntnis dieser Rechenregeln nötig (etwa, daß die Vektoraddition assoziativ oder das Skalarprodukt vertauschbar ist); aus Platzgründen ist es hier aber nicht möglich alles anzugeben.

Nehmen wir als Einstieg mal die Aufgabe, einen vektoriellen Ausdruck für die Lage des *Schwerpunkts* eines Dreiecks zu finden, wenn die Ortsvektoren zu den drei Eckpunkten A, B, C bei einem beliebig festgelegten Ursprung O mit $\overrightarrow{OA}\equiv\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}\equiv\boldsymbol{b}$ und $\overrightarrow{OC}\equiv\boldsymbol{c}$ bekannt sind (Bild). Vom Schwerpunkt G eines Dreiecks ist ja bekannt, daß er jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2:1$ teilt, wobei der größere Teil der Abstand zum Eckpunkt ist (vgl. Aufgabe D.10). Wählen wir zur Berechnung beispielsweise die Seitenhalbierende von AB mit deren Mittelpunkt M, so erhalten wir für den Ortsvektor von M:



$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Der Vektor entlang der Seitenhalbierenden MC ist dann

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\quad\text{und somit}\quad \overrightarrow{MG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\boldsymbol{c}-\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Für den Ortsvektor des Schwerpunkts G finden wir schließlich

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=\boldsymbol{g}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{M.1}$$

Die Lage des Schwerpunkts eines Dreiecks ist somit durch das *arithmetische Mittel* der Ortsvektoren der Eckpunkte bestimmt. Legen wir den Ursprung in den Schwerpunkt des Dreiecks (*Schwerpunktsystem* mit $O=G$), so verschwindet nach (M.1) gerade die Summe der drei Vektoren zu den Eckpunkten:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{g})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{g})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{g})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-3\,\boldsymbol{g}=0. \tag{M.2}$$