U.14 **Gewichtete AM-GM-Ungleichung.** Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen; $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ ebenfalls positive reelle Zahlen (Gewichte) mit $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = 1$. Dann gilt:

$$\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_n a_n \geq a_1^{\delta_1} a_2^{\delta_2} \cdots a_n^{\delta_n}, \tag{U.23}$$

wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn alle a_i untereinander gleich sind.

U.14 *Beweis:* Hier müssen wir eine Anleihe aus der Analysis machen, indem wir die bekannte Ungleichung $x - 1 - \ln x \geq 0$ für alle $x > 0$ verwenden, wobei Gleichheit nur für $x = 1$ gilt (Zeichnen wir die Funktion $y = \ln x$ in ein kartesisches Koordinatensystem, sehen wir, daß die Gerade $y = x - 1$ „über" der Logarithmusfunktion liegt und diese gerade im Punkt $x = 1$ tangiert). Mit der Abkürzung

$$A \equiv \sum_{k=1}^{n} \delta_k a_k$$

liefert die Anwendung dieser Ungleichung $a_i/A - 1 - \ln(a_i/A) \geq 0$ für jedes i. Multiplizieren wir jeden dieser Terme mit δ_i and summieren über i, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta_i a_i}{A} - \delta_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln \left(\frac{a_i}{A} \right) \geq 0.$$

Wegen der obigen Definition von A und der Bedingung $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta_i a_i}{A} - \delta_i \right) = 0 \qquad \text{und somit} \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln \left(\frac{a_i}{A} \right) \leq 0. \tag{U.107}$$

Jetzt nutzen wir die Eigenschaft der Logarithmus-Funktion, im gesamten Definitionsbereich streng monoton zu wachsen, sowie das Exponentialgesetz aus:

$$\exp \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_i \ln \left(\frac{a_i}{A} \right) \right] = \prod_{i=1}^{n} \exp \left[\delta_i \ln \left(\frac{a_i}{A} \right) \right] = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{A} \right)^{\delta_i} = \frac{1}{A} \prod_{i=1}^{n} a_i^{\delta_i} \leq \exp(0) = 1.$$

Somit ist $(a_1^{\delta_1} a_2^{\delta_2} \cdots a_n^{\delta_n})/A \leq 1$ oder

$$a_1^{\delta_1} a_2^{\delta_2} \cdots a_n^{\delta_n} \leq \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_n a_n. \tag{U.108}$$

Gleichheit gilt in (U.108) genau dann, wenn sie auch in (U.107) gilt. Da jeder Summand in (U.107) wegen $a_i > 0$, $\delta_i > 0$ nichtnegativ ist, kann Gleichheit dort nur vorliegen, wenn jeder Summand null ist. Dies ist gleichbedeutend mit $a_i/A = 1$. Mit anderen Worten, Gleichheit gilt nur für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. $\square$