$\boxed{\text{U.19}}$ **PM-Ungleichung.** Mit der Definition (U.27) gilt für alle $-\infty \leq r \leq s \leq \infty$

$$\mathcal{M}_n^r(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \mathcal{M}_n^s(a_1, a_2, \ldots, a_n), \tag{U.33}$$

oder für einige Grade r ausführlich hingeschrieben:

$$\begin{aligned}
\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) &\leq \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \cdots + \frac{1}{a_n^2}}} && (r = -\infty, -2) \\
&\leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} && (r = -1) \\
&\leq \left(\frac{n}{\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n}}}\right)^2 && (r = -\tfrac{1}{2}) \\
&\leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} && (r = 0) \\
&\leq \left(\frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n}}{n}\right)^2 && (r = \tfrac{1}{2}) \\
&\leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} && (r = 1) \\
&\leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} && (r = 2) \\
&\leq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) && (r = +\infty)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\min(a_i) \leq \mathcal{H}_n \leq \mathcal{G}_n \leq \mathcal{A}_n \leq \mathcal{Q}_n \leq \max(a_i).$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn alle a_i untereinander gleich sind.
Bemerkung: $\mathcal{M}_n^2 \equiv \mathcal{Q}_n$ heißt auch *quadratisches Mittel* (QM) oder im Englischen *root-mean-square* (RMS).

U.19 *Beweis:* Wir unterteilen den Beweis in a) $r < 0 < s$, b) $0 < r < s$ und c) $r < s < 0$.
a) Ausgehend von den AM-GM-Ungleichungen

$$\mathcal{G}_n(a_1^s, a_2^s, \ldots, a_n^s) \leq \mathcal{A}_n(a_1^s, a_2^s, \ldots, a_n^s), \quad \mathcal{G}_n(a_1^r, a_2^r, \ldots, a_n^r) \leq \mathcal{A}_n(a_1^r, a_2^r, \ldots, a_n^r),$$

brauchen wir die erste nur zur (positiven) Potenz $\frac{1}{s}$ zu erheben:

$$\mathcal{G}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = [\mathcal{G}_n(a_1^s, a_2^s, \ldots, a_n^s)]^{\frac{1}{s}} \leq [\mathcal{A}_n(a_1^s, a_2^s, \ldots, a_n^s)]^{\frac{1}{s}} = \mathcal{M}_n^s(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

sowie die zweite zur (negativen) Potenz $\frac{1}{r}$:

$$\mathcal{G}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = [\mathcal{G}_n(a_1^r, a_2^r, \ldots, a_n^r)]^{\frac{1}{r}} \geq [\mathcal{A}_n(a_1^r, a_2^r, \ldots, a_n^r)]^{\frac{1}{r}} = \mathcal{M}_n^r(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

um wegen der Transitivität $\mathcal{M}_n^r \leq \mathcal{G}_n \leq \mathcal{M}_n^s$ zu erkennen. Der Fall von Gleichheit bei $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ folgt unmittelbar aus den obigen Ausgangsungleichungen.
b) Im Fall $0 < r < s$ setzen wir $p = s/r > 1$ und $a_i^s = b_i^p$ mit $b_i \equiv a_i^r$ $(1 \leq i \leq n)$. Die Behauptung $\mathcal{M}_n^r \leq \mathcal{M}_n^s$ nimmt dann nach Potenzieren mit r folgende Form an:

$$\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n} = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \leq \left(\frac{b_1^p + \cdots + b_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s}{n}\right)^{\frac{r}{s}}.$$

Wir müssen demnach nur $\mathcal{A}_n(b_1, b_2, \ldots, b_n) \leq \mathcal{M}_n^p(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ mit $p > 1$ für beliebige nichtnegative Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zeigen (mit Gleichheit bei $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$). Da wir es hierbei mit einer *homogenen* Ungleichung zu tun haben, können wir o. B. d. A.

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = n$$

annehmen (s. Abschnitt U.3.2). Dies bedeutet für die Zahlen $x_i \equiv b_i - 1$, daß deren Summe

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - n = 0$$

verschwindet. Wegen $x_i \geq -1$ und $p > 1$ folgt nun aus den verallgemeinerten BERNOULLIschen Ungleichungen (s. Aufgabe **U.12**):

$$b_i^p = (1 + x_i)^p \geq 1 + p x_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

Eine Addition aller dieser Ungleichungen ergibt

$$\begin{aligned}
&b_1^p + b_2^p + \cdots + b_n^p \geq n + p(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,\\
\Longrightarrow\ &\frac{b_1^p + b_2^p + \cdots + b_n^p}{n} \geq 1,\\
\Longrightarrow\ &\left(\frac{b_1^p + b_2^p + \cdots + b_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \geq 1 = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.
\end{aligned}$$

Gleichheit tritt hier genau dann auf, wenn nach (U.6) in allen BERNOULLIschen Ungleichungen $x_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$, gleichbedeutend mit $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$ gilt.
c) Im Fall $r < s < 0$ oder $0 < -s < -r$ schreibt sich die Behauptung als

$$\mathcal{M}_n^{-s}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) \leq \mathcal{M}_n^{-r}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right),$$

welche aufgrund der Relation (U.30)

$$\mathcal{M}_n^{-t}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{\mathcal{M}_n^t(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$

soeben unter b) bewiesen wurde. □