U.21 **Höldersche Ungleichung.** Für alle nicht verschwindenden reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ sowie positiven $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|. \tag{U.36}$$

Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn $|b_i| = \lambda |a_i|^{p-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, für alle i gilt.

U.21 *Beweis:* Wir setzen in die verallgemeinerte HÖLDERsche Ungleichung (U.34) $m = 2$, $p_1 \equiv \frac{1}{p}$, $p_2 \equiv \frac{1}{q}$ und $|a_{1i}| \equiv |a_i|^p$, $|a_{2i}| \equiv |b_i|^q$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ein. Gleichheit gilt demnach für $|a_i|^p \propto |b_i|^q$ oder $|b_i| \propto |a_i|^{p-1}$. $\square$