

**U.22 Minkowskische Ungleichung.** Für alle reellen Zahlen  $a_1, \dots, a_n$  und  $b_1, \dots, b_n$  sowie  $p \geq 1$  gilt:

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{U.37})$$

Gleichheit ist genau dann erfüllt, wenn die  $|a_i|$  und  $|b_i|$  proportional sind, d. h.  $|b_i| = \lambda|a_i|$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , für alle  $i$  gilt.

**U.22** *Beweis:* Für  $p = 1$  folgt die Behauptung direkt aus der Dreiecksungleichung (U.22). Im Fall  $p > 1$  wählen wir eine Zahl  $q > 1$  derart, daß die Relation  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  erfüllt ist. Nehmen wir die HÖLDERSche Ungleichung (U.36) in der Form

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i \beta_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |\beta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

und setzen einmal  $\alpha_i \equiv |a_i|$ ,  $\beta_i \equiv |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}$  und ein weiteres Mal  $\alpha_i \equiv |b_i|$ ,  $\beta_i \equiv |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}$  ein, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n |a_i| |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{bzw.} \quad (\text{U.109})$$

$$\sum_{i=1}^n |b_i| |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{U.110})$$

Wegen  $p = 1 + \frac{p}{q}$  ist weiterhin für jedes  $i$  nach der Dreiecksungleichung

$$|a_i + b_i|^p = |a_i + b_i| |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} \leq |a_i| |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}} + |b_i| |a_i + b_i|^{\frac{p}{q}}. \quad (\text{U.111})$$

Summieren wir über die Terme (U.111) und benutzen dabei (U.109) und (U.110), folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p &\leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[ \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left( \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (\text{U.112})$$

Der zweite Faktor auf der rechten Seite von (U.112) verschwindet gewiß nicht (sonst wäre die Behauptung offensichtlich), so daß nach Division durch diesen (U.37) folgt.  $\square$