U.23 **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.** Angenommen, die Vektoren $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \equiv (a_1, \ldots, a_n)$ und $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \equiv (b_1, \ldots, b_n)$ bestehen aus nichtnegativen reellen Zahlen. Dann gilt:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{u}^2\boldsymbol{v}^2 \geq (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2. \qquad \text{(U.38)}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn entweder alle a_i verschwinden ($\boldsymbol{u} = 0$), alle b_i verschwinden ($\boldsymbol{v} = 0$), oder $b_i = \lambda a_i$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, d. h. $\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{u}$ ist.

U.23 *Beweis: 1.* Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung (U.38) folgt durch Einsetzen von $p = q = 2$ in die HÖLDERsche Ungleichung (U.36). $\square$

2. Viel klarer ist allerdings der Beweis über die CAUCHY-LAGRANGE-Identität:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \ge 0. \ \square$$