U.26 **Jensensche Ungleichung.** Es sei $f(x)$ eine konvexe Funktion im Intervall (a, b) und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ beliebige Punkte darin. Weiterhin seien $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nichtnegative Konstanten mit $c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right). \tag{U.42}$$

Ist f streng konvex und außerdem jedes $c_i > 0$, dann liegt Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ vor.

U.26 *Beweis:* Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Für $n = 2$ folgt (U.42) unmittelbar aus der Konvexität (U.41) von $f(x)$. Angenommen, die zu beweisende Ungleichung ist wahr für $n = k$ und die Zahlen $c_1, \ldots, c_{k+1}$ addieren sich zu 1:

$$c_1 + \cdots + c_{k+1} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1 - c_{k+1}} = 1. \tag{U.114}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i\right) &= f\left((1 - c_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1 - c_{k+1}} x_i + c_{k+1} x_{k+1}\right) \\ &\leq (1 - c_{k+1}) f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1 - c_{k+1}} x_i\right) + c_{k+1} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

wegen der Konvexität von f. Da die Zahlen $c_i/(1 - c_{k+1})$ für $1 \leq i \leq k$ sich nach (U.114) ebenfalls zu 1 addieren, haben wir

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1 - c_{k+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1 - c_{k+1}} f(x_i) = \frac{1}{1 - c_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} c_i f(x_i),$$

also gilt (U.42) auch für $n = k + 1$ und der Induktionsbeweis ist geführt. $\square$