$\boxed{\text{U.33}}$ Zeige, daß folgende Ungleichung für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt:

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0.$$

(*Irland, 1998*)

U.33 *Beweis:* Zunächst multiplizieren wir die Behauptung mit x^4, damit die Brüche verschwinden (wegen $x^4 > 0$ bleibt das Relationszeichen erhalten):

$$x^{12} - x^9 - x^3 + 1 \geq 0.$$

Unsere Strategie ist es hier, dieses Polynom so zu faktorisieren, daß alle Faktoren positiv sind. Das ist hier nicht besonders schwer, da es nur zwei Faktoren sind:

$$x^{12} - x^9 - x^3 + 1 = (x^9 - 1)(x^3 - 1). \tag{U.115}$$

Nun unterscheiden wir
1. $x \geq 1$: damit auch $x^3 \geq 1$ und $x^9 \geq 1$, somit ist (U.115) nichtnegativ;
2. $x \leq 1$: damit auch $x^3 \leq 1$ und $x^9 \leq 1$, also auch hier (U.115) nichtnegativ. $\square$