$\boxed{\textsf{U.36}}$ Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}+\frac{a^3+b^3+d^3}{a+b+d}+\frac{a^3+c^3+d^3}{a+c+d}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b+c+d} \geq a^2+b^2+c^2+d^2.$$

U.36 *Beweis:* Die Methode der Zerlegung in kürzere Ungleichungen läßt hoffen, daß

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \tag{U.117}$$

gelten könnte, da dann die Behauptung sofort durch zyklische Vertauschung und Addition folgt. Eine Beseitigung der Brüche in (U.117) führt auf

$$3(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)(a+b+c), \tag{U.118}$$

die ihrerseits unmittelbar aus der TSCHEBYSCHEFFschen Ungleichung (U.39) folgt. Falls uns letztere nicht geläufig ist, können wir noch den beschwerlichen Weg gehen und (U.118) in einen Ausdruck umformen, der offensichtlich größer oder gleich null ist:

$$\begin{aligned}
&2a^3+2b^3+2c^3-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2 \\
&= (a^3-a^2b-ab^2+b^3)+(a^3-a^2c-ac^2+c^3)+(b^3-b^2c-bc^2+c^3) \\
&= (a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c) \geq 0. \quad \square
\end{aligned}$$