$\boxed{\text{U.39}}$ Für $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ beweise die Ungleichung

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z)$$

und bestimme, unter welchen Bedingungen Gleichheit gilt.
(*Kanada, 1992*)

U.39 *Beweis:* Die Ungleichung ist symmetrisch in x, y und z, da sie nach Expansion in

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3\,xyz \geq x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2$$

übergeht. Ausnahmsweise geben wir hier einmal diejenigen Schritte an, die beim „Entdecken“ der Lösung gemacht werden, wohl wissend, daß sie bei der Formulierung des Beweises umzukehren sind:

$$\begin{aligned}
&x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z) = (x-z)(y-z)(x-z+y-z+z)\\
\Longrightarrow\quad &(x-z)^2x + (z-y)^2y \geq (x-z)^2(y-z) + (z-y)^2(x-z) + (x-z)(y-z)z\\
\Longrightarrow\quad &(x-z)^2(x+z-y) + (z-y)^2(z+y-x) + (x-z)(z-y)z \geq 0.
\end{aligned}$$

Wir bemerken hierbei, welche Ungleichungskette wir anzunehmen haben, nämlich $x \geq z \geq y$ (die Variable z wird „in die Mitte genommen“, da sie in der Behauptung als ausgezeichnete Größe erscheint, obwohl sie es wegen der Symmetrie nicht tatsächlich ist). Dann sind alle Klammerausdrücke bis auf $(z+y-x)$ nichtnegativ; glücklicherweise lassen sich aber der zweite und dritte Summand wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
(z-y)[(z-y)(z+y-x) + (x-z)z] &= (z-y)(z^2 + yz - xz - yz - y^2 + xy + xz - z^2)\\
&= (z-y)(x-y)y \geq 0.
\end{aligned}$$

Somit sind alle Summanden nichtnegativ. Gleichheit ist nur für $x = y = z$ erfüllt. □

Bemerkung: Eine Verwandtschaft mit der SCHURschen Ungleichung (U.40) ist unverkennbar.