$\boxed{\textsf{U.41}}$ In jedem Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und Winkeln α, β, γ gilt:

$$\frac{a+b-2c}{\sin\frac{\gamma}{2}} + \frac{b+c-2a}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{c+a-2b}{\sin\frac{\beta}{2}} \geq 0.$$

U.41 *Beweis:* Wenn – wie in der vorliegenden Ungleichung – zu zeigen ist, daß Summen positiv sind (und dabei nicht jeder Summand von vornherein klar positiv ist), bietet sich immer der Versuch an, jeden Summanden als ein Produkt offensichtlich positiver Faktoren zu schreiben. Hier gelingt dies durch die Umformung der linken Seite in

$$(a-b)\left(\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)+(a-c)\left(\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)+(b-c)\left(\frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)\geq 0.$$

Die jeweils ersten Faktoren sind nun positiv, wenn wir $a \geq b \geq c$ annehmen (wegen der Symmetrie ist dies immer möglich). Da in einem Dreieck der größten (kleinsten) Seite auch der größte (kleinste) Winkel gegenüberliegt, folgt daraus $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, und – wegen der Monotonie der Sinusfunktion im Intervall $(0, \pi/2)$ – weiter

$$\sin\frac{\alpha}{2} \geq \sin\frac{\beta}{2} \geq \sin\frac{\gamma}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} \geq \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Damit sind alle Faktoren positiv, somit auch die Summe. $\square$