$\boxed{\text{U.43}}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ seien beliebige reelle Zahlen. Dann gilt

$$\left(a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + \cdots + na_n^2\right)\left(b_1^2 + \frac{1}{2}b_2^2 + \frac{1}{3}b_3^2 + \cdots + \frac{1}{n}b_n^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

U.43 *Beweis:* Setzen wir $u_k \equiv \sqrt{k}\, a_k$ und $v_k \equiv b_k/\sqrt{k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, dann gilt

$$\boldsymbol{u}^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \sum_{k=1}^{n} k a_k^2, \quad \boldsymbol{v}^2 = \sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\, b_k^2, \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Die Behauptung folgt direkt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $\boldsymbol{u}^2 \cdot \boldsymbol{v}^2 \geq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$. $\square$