U.45 Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ positive reelle Zahlen mit $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Zeige, daß

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{2}.$$

(*APMO, 1991*)

U.45 *Beweis:* Beim Typ d) $\mathcal{S}_1 \geq \mathcal{S}_3$ ist es manchmal nicht einfach, die Summe $\mathcal{S}_2$, durch die zuvor dividiert wurde, zu erraten. $\mathcal{S}_1$ gibt uns jedoch die Summe $\boldsymbol{u}^2$ und $\mathcal{S}_3$ die Summe $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ vor (vgl. Aufgabe U.23):

$$\mathcal{S}_1 \equiv \boldsymbol{u}^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n},$$

$$\mathcal{S}_3 \equiv \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2}.$$

Um nun $\boldsymbol{u}^2 \cdot \boldsymbol{v}^2 \geq (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$ erfüllen zu können, vermuten wir durch gliedweisen Vergleich von

$$u_i^2 = \frac{a_i^2}{a_i + b_i}, \qquad u_i^2 v_i^2 = \frac{a_i^2}{4} \quad \Longrightarrow \quad v_i^2 = \frac{a_i + b_i}{4},$$

somit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 \equiv \boldsymbol{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 &= \frac{a_1 + b_1}{4} + \frac{a_2 + b_2}{4} + \cdots + \frac{a_n + b_n}{4} \\ &= \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also tatsächlich $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3$ und haben damit die Behauptung bewiesen. $\square$