$\boxed{\text{U.47}}$ Man beweise: Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gilt die Ungleichung

$$\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{3}{2}.$$

(*IMO-Auswahlwettbewerb Deutschland, 2001*)

U.47 *Beweis:* Die Kleiner-Gleich-Seite der vorgelegten Ungleichung hat die Struktur $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ mit

$$\boldsymbol{u} = \left(\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \sqrt{\frac{b}{b+c}}, \sqrt{\frac{c}{c+a}}\right) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v} = \left(\sqrt{\frac{a}{c+a}}, \sqrt{\frac{b}{a+b}}, \sqrt{\frac{c}{b+c}}\right).$$

(U.48), AM-GM in Verbindung mit CAUCHY-SCHWARZ, liefert nun in einem Zuge das Ergebnis:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}\right) &= \frac{3}{2} \\ &\geq \frac{a}{\sqrt{(a+b)(c+a)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+c)(a+b)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(b+c)}}. \quad \square\end{aligned}$$