$\boxed{\text{U.48}}$ Es sei $S \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ mit $x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Man zeige

$$\frac{S}{S - x_1} + \frac{S}{S - x_2} + \cdots + \frac{S}{S - x_n} \geq \frac{n^2}{n-1},$$

wobei das Gleichheitszeichen genau bei $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ gilt.

U.48 *Beweis:* Die AM-HM-Ungleichung in den positiven Zahlen a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 \tag{U.122}$$

hat die Besonderheit, daß sie außer der Summe $\sum a_i$ auch die Summe der Reziproken $\sum(1/a_i)$ enthält. Setzen wir die linke Seite der behaupteten Ungleichung gleich $\sum a_i$, also $a_i = S/(S-x_i)$, so vereinfacht sich $\sum(1/a_i)$ wegen übereinstimmender Zähler der a_i zu

$$\sum \frac{1}{a_i} = \frac{S - x_1}{S} + \frac{S - x_2}{S} + \cdots + \frac{S - x_n}{S} = \frac{nS - S}{S} = n - 1. \tag{U.123}$$

Die Behauptung folgt direkt aus (U.122) und (U.123) mit Gleichheit bei $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ oder $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. $\square$

Bemerkung: Auch die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung (U.38) führt hier zum Ziel.