$\boxed{\text{U.50}}$ Beweise

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^+.$$

(USA, 1974)

U.50 *Beweis:* Die behauptete Ungleichung ist symmetrisch in den Variablen a, b, c, weshalb wir o. B. d. A. $a \leq b \leq c$ annehmen dürfen. Da die Logarithmusfunktion $\ln x$ in ihrem Definitionsbereich $x > 0$ streng monoton wachsend ist, folgt aus obiger Annahme $\ln a \leq \ln b \leq \ln c$. Nach der Tschebyscheffschen Ungleichung (U.39) gilt daher

$$
\begin{aligned}
& a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq \frac{a+b+c}{3} (\ln a + \ln b + \ln c), \\
\Longrightarrow \quad & \ln a^a + \ln b^b + \ln c^c \geq \ln a^{\frac{a+b+c}{3}} + \ln b^{\frac{a+b+c}{3}} + \ln c^{\frac{a+b+c}{3}}, \\
\Longrightarrow \quad & \ln \left(a^a b^b c^c \right) \geq \ln \left[(abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \right].
\end{aligned}
$$

Die Exponentialfunktion e^x ist ebenfalls streng monoton wachsend, woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt:

$$
\mathrm{e}^{\ln\left(a^a b^b c^c\right)} \geq \mathrm{e}^{\ln\left[(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\right]} \qquad \Longrightarrow \qquad a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}. \ \square
$$