$\boxed{\textsf{U.51}}$ Man zeige, daß für alle positiven reellen Zahlen x, y, z gilt:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

U.51 *Beweis:* Aufgrund der Symmetrie sei $x \leq y \leq z$ angenommen. Daraus folgt:

$$x^2 \leq y^2 \leq z^2, \qquad x+y \leq x+z \leq y+z \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{x+y}.$$

Die erste und letzte Folge taugen für eine Anwendung der TSCHEBYSCHEFFschen Ungleichung:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right). \tag{U.124}$$

Beide Faktoren auf der rechten Seite müssen nun noch „auf $x+y+z$ gebracht werden“. Den ersten Faktor erledigt die PM-Ungleichung am schnellsten, den zweiten die AH-HM-Ungleichung:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2, \qquad \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{9}{2(x+y+z)}.$$

Beides in (U.124) eingesetzt, ergibt die Behauptung. □