$\boxed{\text{U.52}}$ Man finde den minimalen Wert des Ausdrucks $(x+y)(y+z)$ mit positiven reellen Zahlen x, y und z, die die Bedingung $xyz(x+y+z)=1$ erfüllen.
(*Großbritannien, 1991*)

U.52 *Beweis:* Bei dieser Aufgabe fällt auf, daß die Nebenbedingung symmetrisch in den drei Variablen ist, der abzuschätzende Ausdruck dagegen nicht. Wir sehen ihm aber an, daß x und z vertauschbar sind und damit die Variable y offensichtlich bevorzugt ist. Wenn wir also durch die Nebenbedingung eine Variable eliminieren wollen, dann sollte es y sein:

$$xyz(x+y+z) = xzy^2 + xz(x+z)y = 1, \qquad \text{oder} \qquad y^2 + (x+z)y - \frac{1}{xz} = 0.$$

Der Zielausdruck expandiert zu

$$\mathcal{E} = (x+y)(y+z) = xy + y^2 + xz + yz = y^2 + (x+z)y + xz.$$

Ein simpler Vergleich führt auf $\mathcal{E} = xz + \frac{1}{xz} \geq 2$, letzteres wegen der Mutter aller Ungleichungen (U.45). $\square$