$\boxed{\text{U.58}}$ Für alle ganzzahligen $n \geq 2$ bestimme man den minimalen Wert von

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_1 + x_3 + \cdots + x_n} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}$$

unter der Nebenbedingung $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$.
(*IMO-Auswahlwettbewerb Türkei, 1997*)

U.58 *Beweis:* Da sowohl der gegebene Ausdruck $\mathcal{E}$ als auch die Nebenbedingung symmetrisch in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, können wir o. B. d. A. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ annehmen. Mit $S \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ gilt daher auch

$$\frac{x_1^4}{S - x_1} \geq \frac{x_2^4}{S - x_2} \geq \cdots \geq \frac{x_n^4}{S - x_n}.$$

(Aus $x_1 \geq x_2$ folgt z. B. der Reihe nach $-x_1 \leq -x_2$, $S - x_1 \leq S - x_2$, $\frac{1}{S-x_1} \geq \frac{1}{S-x_2}$ und schließlich $\frac{x_1^4}{S-x_1} \geq \frac{x_2^4}{S-x_2}$.) Die beiden Folgen $a_i = x_i$ und $b_i = \frac{x_i^4}{S-x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind mithin gleichsinnig geordnete Zahlen, so daß die TSCHEBYSCHEFFsche Ungleichung (U.39) (s. Aufgabe U.24) zum Zuge kommen kann:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^5}{S - x_i} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{S - x_i} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{S}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{S - x_i}.$$

Der verbleibende Ausdruck wird mittels der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung abgeschätzt, wobei die Nebenbedingung $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ mit eingeht:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{S - x_i} \right] \left[\sum_{i=1}^{n} (S - x_i) \right] \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^2 = 1.$$

Mit $\sum_{i=1}^{n}(S - x_i) = (n-1)S$ folgt schließlich als Minimalwert

$$\mathcal{E} \geq \frac{S}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{S - x_i} \geq \frac{S}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)S} = \frac{1}{n(n-1)}.$$