$\boxed{\textsf{U.60}}$ Beweise oder widerlege folgende Ungleichung für $a, b, c \geq 1$:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)}.$$

(*Crux Mathematicorum 2078*, 1995)

U.60 *Beweis:* Hier hilft eine Substitution, die die Summe der Wurzeln auf der linken Seite eliminiert: $a-1=x^2$, $b-1=y^2$, $c-1=z^2$, wobei $x,y,z\geq 0$. Die Ungleichung geht damit über in

$$x+y+z\leq\sqrt{(z^2+1)[(x^2+1)(y^2+1)+1]}.$$

Nach Cauchy-Schwarz ist aber

$$\begin{aligned} & x+y=x\cdot 1+1\cdot y\leq\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \\ \Longrightarrow\ & x+y+z\leq z+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\leq\sqrt{z^2+1}\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)+1}. \quad\square \end{aligned}$$