$\boxed{\text{U.61}}$ Für positive Zahlen a, b, c mit $a + b + c = abc$ zeige, daß die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

gilt und bestimme, wann Gleichheit auftritt.
(*Korea, 1998*)

U.61 *Beweis:* Hier haben wir genau die eingangs genannte exotische Nebenbedingung vorzuliegen. Mit

$$a = \tan\alpha, \qquad b = \tan\beta, \qquad c = \tan\gamma$$

wird aus der Nebenbedingung $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ (d. h., α, β, γ sind Innenwinkel eines Dreiecks) und aus der Ungleichung selbst wegen

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}} = \cos\alpha,$$

$$\Longrightarrow \qquad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Das ist aber nichts anderes als Aufgabe **G.41a** mit Gleichheit nur bei $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ oder $a = b = c = \sqrt{3}$. $\square$