U.7 **Multiplikation von Ungleichungen.** Wenn $a > b > 0$ und $c > d > 0$, dann $ac > bd$. Allgemeiner gilt: Wenn $a_1 \geq b_1 > 0$, $a_2 \geq b_2 > 0$, $\ldots$, $a_n \geq b_n > 0$, dann

$$a_1 a_2 \cdots a_n \geq b_1 b_2 \cdots b_n$$

mit Gleichheit genau für $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$.

U.7 *Beweis:* Aus $a_1 \geq b_1 > 0$ und $a_2 \geq b_2 > 0$ folgt nach Aufgabe U.3 $a_1 a_2 \geq b_1 a_2$ und $b_1 a_2 \geq b_1 b_2$. Wegen der Transitivität folgt daraus $a_1 a_2 \geq b_1 b_2$. Da das Produkt $b_1 b_2 > 0$ positiv ist, können wir dieses Verfahren für $n \geq 3$ beliebig oft wiederholen und erhalten $a_1 a_2 a_3 \geq b_1 b_2 b_3$ usw. Als letzten Schritt in dieser Ungleichungskette finden wir

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \geq a_1 a_2 \cdots a_{n-1} b_n \geq b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n.$$

Bei angenommener Gleichheit in der behaupteten Ungleichung haben wir nach obiger Ungleichung $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} b_n$, woraus (wegen $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \neq 0$) $a_n = b_n$ sowie $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$ folgt. Dieses Vorgehen wiederholend gelangen wir zu $a_{n-1} = b_{n-1}$ usw., bis schließlich $a_1 = b_1$ erreicht wird. $\square$