U.71 **Fundamentalsatz (Hauptsatz) über symmetrische Polynome.** Jedes symmetrische Polynom $P(x_1, \ldots, x_n)$ (mit ganzzahligen Koeffizienten) läßt sich als Polynom (mit ganzzahligen Koeffizienten) in den elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ schreiben.

U.71 *Beweis:* Wir ordnen die Summanden des gegebenen symmetrischen Polynoms *lexikographisch* (wie im Lexikon), d. h. so, daß ein Glied $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ einem anderen $x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$ vorangeht, wenn die erste nichtverschwindende Differenz $\alpha_i-\beta_i$ positiv ist. Mit einem Glied $ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ kommen auch alle Glieder vor, deren Exponenten eine Permutation der α_i bilden; diese werden nicht alle geschrieben, sondern wir schreiben $a\sum x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, indem wir nur das lexikographisch früheste Glied der Summe wirklich anschreiben. Für dieses gilt $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_n$.
Der Grad des vorgelegten symmetrischen Polynoms sei k, das lexikographische Anfangsglied sei $ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$. Nun bilden wir ein Produkt von elementaren symmetrischen Funktionen, welches (ausmultipliziert und lexikographisch geordnet) dasselbe Anfangsglied $ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ besitzt. Dieses ist leicht zu finden, nämlich:

$$a\sigma_1^{\alpha_1-\alpha_2}\sigma_2^{\alpha_2-\alpha_3}\cdots\sigma_n^{\alpha_n}.$$

Dieses Produkt subtrahieren wir vom gegebenen Polynom, ordnen wieder lexikographisch, suchen das Anfangsglied usw.
Das Verfahren kommt sicher einmal zu einem Ende. Das abgezogene Produkt hat nämlich das Gewicht

$$\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_2-2\alpha_3+3\alpha_3\cdots-(n-1)\alpha_n+n\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n\leq k,$$

also hat es, als Polynom in den x geschrieben, einen Grad $\leq k$. Der Grad der vorgelegten symmetrischen Funktion wird also durch die Subtraktion nicht erhöht. Bei gegebenem Grad k sind aber nur endlich viele Potenzprodukte $ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ möglich. Da nun bei jeder Subtraktion ein solches Potenzprodukt verschwindet und nur lexikographisch spätere übrig bleiben, muß das Verfahren nach endlich vielen Schritten dadurch abbrechen, daß nichts mehr übrig bleibt. □