U.72 Mit den elementaren symmetrischen Funktionen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ und den Summen $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$ gilt für jedes $n \geq 1$ folgende Identität:

$$\sigma_n s_0 - \sigma_{n-1} s_1 + \sigma_{n-2} s_2 - \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_1 s_{n-1} + (-1)^n s_n = 0. \tag{U.63}$$

U.72 *Beweis:* Da nach (U.50) die x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gerade die Nullstellen des Polynoms $P(x)$ sind, gilt:

$$x_i^n - \sigma_1 x_i^{n-1} + \sigma_2 x_i^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x_i + (-1)^n\sigma_n = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Diese n Gleichungen können wir addieren und erhalten mit der Definition der s_k:

$$s_n - \sigma_1 s_{n-1} + \sigma_2 s_{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}s_1 + (-1)^n\sigma_n s_0 = 0,$$

wobei $s_0 = n$ ist. Um nun die Behauptung zu erhalten, brauchen wir diese Gleichung nur noch mit $(-1)^n$ zu multiplizieren und die Summanden in umgekehrter Reihenfolge aufzuschreiben. $\square$