$\boxed{\text{U.74}}$ Zeige, daß folgende Bedingungen einander äquivalent sind:

$$\{\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \ldots, \sigma_n > 0\} \iff \{x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}. \tag{U.104}$$

Beispiel: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{a + b + c > 0,\ bc + ca + ab > 0,\ abc > 0\} \iff \{a > 0, b > 0, c > 0\}.$$

U.74 *Beweis:* Daß aus $\{x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}$ auch $\{\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \ldots, \sigma_n > 0\}$ folgt, ist unmittelbar einzusehen, da in der Definition der σ's nur positive Summanden vorkommen. Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, schreiben wir die Definition (U.49) nochmals hin:

$$x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x + (-1)^n \sigma_n = 0,$$

und überprüfen, ob diese Gleichung auch negative Wurzeln haben kann, indem wir x durch $-x$ ersetzen:

$$x^n + \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \cdots + \sigma_{n-1}x + \sigma_n = 0. \tag{U.125}$$

Wenn nun alle σ_i positiv sind, kann das Polynom (U.125) nicht für positive x verschwinden. Da es aber gerade für $x = -x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ Nullstellen hat, folgt daraus $x_k > 0$. $\square$