U.81 Es seien a, b, c und d positive Zahlen. Beweisen Sie, daß unter dieser Voraussetzung stets folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+d}+\frac{1}{a+c+d}+\frac{1}{b+c+d}>\frac{4}{a+b+c+d}.$$

(*36. Mathematik-Olympiade 1996/97, Klasse 9, Stufe 2*)

U.81 *Beweis:* Aus der Anzahl der Summanden auf der linken Seite der behaupteten Ungleichung und dem Faktor 4 auf der rechten Seite können wir vermuten, daß das Prinzip „Teile und (be)herrsche" (s. Abschnitt U.3.1) zur Anwendung kommt. Tatsächlich folgt wegen $a, b, c, d > 0$ aus $a + b + c < a + b + c + d \equiv s$ bzw. den analogen Ungleichungen $a + b + d < s$, $a + c + d < s$ und $b + c + d < s$:

$$\frac{1}{a+b+c} > \frac{1}{s}, \qquad \frac{1}{a+b+d} > \frac{1}{s}, \qquad \frac{1}{a+c+d} > \frac{1}{s}, \qquad \frac{1}{b+c+d} > \frac{1}{s}.$$

Deren Addition liefert die Behauptung. □
Bemerkung: Das geübte Auge erkennt die Verschärfung durch die AM-HM-Ungleichung:

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{a+b+c+d}.$$