$\boxed{\text{U.88}}$ Für positive Zahlen x, y, z, die die Gleichung $x + y + z = 1$ erfüllen, zeige man

a) $\left(\frac{1}{x} + 1\right)\left(\frac{1}{y} + 1\right)\left(\frac{1}{z} + 1\right) \geq 64,$

b) $\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{z} - 1\right) \geq 8.$

U.88 *Beweis:* a) Expandieren des Produkts führt auf

$$\mathcal{P} = 1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}\right) + \frac{1}{xyz}.$$

Nach AM-GM gilt

$$3\sqrt[3]{xyz} \le x + y + z = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \ge 3,$$

und weiter

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \ge \frac{3}{(xyz)^{\frac{1}{3}}}, \qquad \left(\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}\right) \ge \frac{3}{(xyz)^{\frac{2}{3}}},$$

so daß

$$\mathcal{P} \ge 1 + \frac{3}{(xyz)^{\frac{1}{3}}} + \frac{3}{(xyz)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{xyz} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}\right)^3 \ge (1+3)^3 = 64. \ \square$$

b) Ein Expandieren liefert hier

$$\mathcal{P} = \frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz} = \frac{1 - (x+y+z) + (yz + zx + xy) - xyz}{xyz}$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1,$$

wobei jetzt AM-HM weiterhilft:

$$\mathcal{P} + 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z} = 9, \quad \text{also} \quad \mathcal{P} \ge 8. \ \square$$